

EEC 2 - MATEMÁTICAS.

EJERCICIO 1. Consideramos en el espacio de las funciones continuas en el intervalo $[0, 1]$, $C[0, 1]$, el producto escalar:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx$$

para $f, g \in C[0, 1]$. El producto escalar entre

$$f(x) = x^2 - 1$$

es ?

$$g(x) = x$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^2 - 1) \cdot x \, dx &= \int_0^1 (x^3 - x) \, dx = \left. \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1 - 2}{4} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

EJERCICIO 2. Sea $\bar{x}: (-2, 2) \rightarrow \mathbb{R}^3$ la curva de ecuación $\bar{x}(t) = (2 \cdot \sin t, \cos(\pi t), t + 1)$. Señálese la ecuación del plano osculador a la curva en $(0, 1, 1)$.

$$\bar{x}'(t) = (2 \cdot \cos t, -\pi \cdot \sin(\pi t), 1)$$

$$\bar{x}''(t) = (-2 \cdot \sin t, -\pi^2 \cdot \cos(\pi t), 0)$$

Para $t = 0$:

$$\bar{x}(0) = (0, 1, 1)$$

$$\bar{x}'(0) = (2, 0, 1)$$

$$\bar{x}''(0) = (0, -\pi^2, 0)$$

Un punto (x, y, z) del plano osculador va a verificar:

$$0 = \det(x'(0), x''(0), (x, y, z) - (0, 1, 1))$$

$$0 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -\pi^2 & 0 \\ x & y-1 & z-1 \end{vmatrix} = -2\pi^2(z-1) + \pi^2 x =$$

$$= -2\pi^2 z + 2\pi^2 + \pi^2 x =$$

$$= \pi^2(-2z + 2 + x)$$

Por eso la ecuación del plano osculador en $(0, 1, 1)$ es:

$$0 = -2z + 2 + x$$

$$2z - x = 2$$

EJERCICIO 3. Sea C la curva dada por las ecuaciones

$$x(t) = t^2$$

$$y(t) = t^2 + e^t$$

$$z(t) = \cos t$$

$$\left. \begin{array}{l} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^2 + e^t \\ z(t) = \cos t \end{array} \right\} t \in \mathbb{R}$$

el Triedro de Frenet en el punto $\bar{x}(0)$?

$$\bar{x}(t) = (t^2, t^2 + e^t, \cos t)$$

$$\bar{x}'(t) = (2t, 2t + e^t, -\sin t) \rightarrow x'(0) = (0, 1, 0)$$

$$\bar{x}''(t) = (2, 2 + e^t, -\cos t) \rightarrow x''(0) = (2, 3, -1)$$

La curva no está parametrizada por la longitud de arco y entonces, tenemos el vector tg a la curva:

$$t(0) = \frac{x'(t)}{\|x'(t)\|} = \frac{(0, 1, 0)}{\sqrt{1^2}} = (0, 1, 0)$$

Además:

$$v = [x'(0) \wedge x''(0)] \wedge x'(0)$$

$$x'(0) \wedge x''(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 2\vec{k} = (-1, 0, -2)$$

$$\rightarrow v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{k} + 2\vec{i} = (2, 0, -1)$$

Tiene la misma dirección y sentido que el vector normal principal $\hat{n}$ por tanto:

$$n = \frac{v}{\|v\|} = \frac{(2, 0, -1)}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{(2, 0, -1)}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} (2, 0, -1)$$

Por tanto, el vector binomial es:

$$b = t \wedge n = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{k} =$$

$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = (-1, 0, -2) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$$

El triedro de Frenet es: $F = \{t, n, b\}$

$$F = \left\{ (0, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{5}} (2, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{5}} (-1, 0, -2) \right\}$$

EJERCICIO 4. Sea S la superficie dada por:

$$\bar{x}(u,v) = (u, v, u-v^2), \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

señálese la opción correcta:

- a) Las otras son falsas.
- b) Todos los puntos de S son hiperbólicos. e.g. $f^2 < 0$
- c) Todos los puntos de S son parabólicos. e.g. $f^2 = 0$
y alguno de $e, g, f \neq 0$.
- d) " " " " " " " elípticos. e.g. $f^2 > 0$
- e) S tiene puntos elípticos, parabólicos e hiperbólicos.
- f) S sólo tiene puntos planos.
 $\hookrightarrow e, g, f^2 = 0$

$$\hookrightarrow e \cdot g - f^2 = 0$$

$$e = g = f = 0$$

Comenzamos determinando las derivadas parciales de $\Sigma(u,v)$

$$\bar{x}_u(u,v) = (1, 0, 1)$$

$$\bar{x}_U(u,v) = (0, 1, -2v)$$

El vector unitario $\bar{N}$ es:

$$\bar{N} = \frac{\bar{x}_u \wedge \bar{x}_v}{\|\bar{x}_u \wedge \bar{x}_v\|}$$

$$\overrightarrow{x_u} \wedge \overrightarrow{x_v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2v \end{vmatrix} = \overrightarrow{k} - [\overrightarrow{i} - 2v\overrightarrow{j}] = \overrightarrow{k} - \overrightarrow{i} + 2v\overrightarrow{j} = (-1, 2v, 1)$$

$$\vec{N} = \frac{(-1, 2v, 1)}{\sqrt{1^2 + 2^2 v^2 + 1^2}} = \frac{(-1, 2v, 1)}{\sqrt{2 + 4v^2}}$$

Calculamos las derivadas segundas:

$$\bar{x}_{uu}(u,v) = (0, 0, 0)$$

$$\bar{x}_{vv}(u,v) = (0, 0, -2)$$

$$\bar{x}_{uv}(u,v) = (0, 0, 0)$$

Los coeficientes son:

$$e = \bar{N} \cdot x_{uu} = \bar{N} \cdot (0, 0, 0) = 0$$

$$f = \bar{N} \cdot x_{uv} = \bar{N} \cdot (0, 0, 0) = 0$$

$$g = \bar{N} \cdot x_{vv} = \frac{(-1, 2v, 1)}{\sqrt{2+4v^2}} \cdot (0, 0, -2) = \frac{-2}{\sqrt{2+4v^2}} \neq 0$$

Entonces:

$$e \cdot g - f^2 = 0 \cdot \left(\frac{-2}{\sqrt{2+4v^2}} \right) - 0^2 = 0 - 0 = \underline{\underline{0}}$$

$g \neq 0$.

→ Todos los puntos de S son parabólicos.

EJERCICIO 5. Sea S la superficie dada por:

$$z = x^2 - y^2 + y$$

Entonces, las curvaturas principales en el punto $(1, 0, 1)$, ¿cuáles son?

⇒ Parametrizamos:

$$x = u \quad y = v \quad z = u^2 - v^2 + v$$

→ Derivadas parciales:

$$\bar{x}(u,v) = (u, v, u^2 - v^2 + v)$$

$$\bar{x}_u(u,v) = (1, 0, 2u)$$

$$\bar{x}_v(u,v) = (0, 1, -2v + 1)$$

El vector unitario $\bar{N}$ es:

$$\bar{N} = \frac{\bar{x}_u \wedge \bar{x}_v}{\|\bar{x}_u \wedge \bar{x}_v\|}$$

$$\bar{x}_u \wedge \bar{x}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & (-2v+1) \end{vmatrix} = \vec{k} - (2u \cdot \vec{i} + (-2v+1) \cdot \vec{j}) =$$

$$= \vec{k} - 2u \vec{i} + (2v-1) \vec{j} = (-2u, 2v-1, 1)$$

$$\bar{N} = \frac{(-2u, 2v-1, 1)}{\sqrt{4u^2 + (2v-1)^2 + 1}}$$

Calculamos las derivadas segundas:

$$\bar{x}_{uu}(u,v) = (0, 0, 2)$$

$$\bar{x}_{vv}(u,v) = (0, 0, -2)$$

$$\bar{x}_{uv}(u,v) = (0, 0, 0)$$

Como $p(1, 0, 1) : u=1 \quad v=0$

$$\bar{N} = \frac{(-2, -1, 1)}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{(-2, -1, 1)}{\sqrt{6}}$$

$$E = x_u \cdot x_u = (1, 0, 2) \cdot (1, 0, 2) = (1+0+4) = 5$$

$$F = x_u \cdot x_v = (1, 0, 2) \cdot (0, 1, 1) = (0+0+2) = 2$$

$$G = x_v \cdot x_v = (0, 1, 1) \cdot (0, 1, 1) = (0+1+1) = 2$$

$$e = N \cdot x_{uu} = \bar{N} (0, 0, 2) = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$f = N \cdot x_{uv} = \bar{N} (0, 0, 0) = 0$$

$$g = N \cdot x_{vv} = \bar{N} (0, 0, -2) = \frac{-2}{\sqrt{6}}$$

La ecuación de las curvas principales es:

$$(EG - F^2) \cdot K^2 - (Eg + Ge - 2Ff) \cdot K + (eg - f^2) = 0$$

Sustituyendo:

$$0 = (5 \cdot 2 - 2^2) \cdot K^2 - \left(5 \cdot \left(\frac{-2}{\sqrt{6}} \right) + 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} - 2 \cdot \cancel{2} \cdot 0 \right) K + \left(\frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{-2}{\sqrt{6}} - 0 \right)$$

$$= (10 - 4) \cdot K^2 - \left(\frac{-10}{\sqrt{6}} + \frac{4}{\sqrt{6}} \right) \cdot K + \left(-\frac{4}{6} \right) = 0$$

$$6 K^2 + \frac{6}{\sqrt{6}} \cdot K - \frac{2}{3} = 0$$

$$K = \begin{cases} \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{22}}{12} = K_1 \\ \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{22}}{12} = K_2 \end{cases}$$

Curvas principales:

$$K_1 = -\frac{1}{12} \cdot \sqrt{6} + \frac{1}{12} \cdot \sqrt{22}$$

$$K_2 = -\frac{1}{12} \cdot \sqrt{6} - \frac{1}{12} \cdot \sqrt{22}$$